Clase 4 (11/03) - Lunes

# Diferenciales Exactas y el Factor Integrante

## Apuntes Universitarios: Ecuaciones y Termodinámica

## La Forma Estándar:

$$d\phi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

## La Regla de Oro

Para que sea exacta, las derivadas parciales cruzadas deben ser iguales:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

# El "Rebelde" Diferencial Inexacto

**¿Qué pasa si** $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$**?**

Tenemos una diferencial inexacta.
No se puede integrar directamente.

**Ejemplo Famoso: ¡El Calor en Física!** ($\cancel{\delta Q}$).
A diferencia de otras variables, el calor depende del camino tomado.

# El Héroe: El Factor Integrante (μ)

- **El Factor Integrante ($\mu(x,y)$):** Es una función *mágica* no nula.
- **Su Superpoder:** Al multiplicar una ecuación inexacta por $\mu$, ¡la transforma en una diferencial exacta!

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \longrightarrow \times\, \boldsymbol{\mu} \qquad d\phi = \mu \cdot [M(x,y)dx + N(x,y)dy]$$

Nueva condición mágica: $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

# Caso de Estudio: Termodinámica (Gas Ideal)

**Energía Interna:**

$$dU = C_v dT$$

(Nota: C_v = Calor específico a volumen constante)

**Transferencia de Calor:**

$$\delta Q = dU + P dv = C_v dT + P dv$$

**Ley de Gases Ideales:**

$$PV = N k_B T \Rightarrow P = \frac{k_B T}{v}$$

(asumiendo N=1)

**Nuestra Ecuación:**

$$\delta Q = C_v dT + \frac{k_B T}{v} dv$$

# Diagnóstico: Evaluando la exactitud de δQ

## Variable M

$$M = C_v \rightarrow \frac{\partial C_v}{\partial v} = 0$$

## Variable N

$$N = \frac{k_B T}{v} \rightarrow \frac{\partial \left( \frac{k_B T}{v} \right)}{\partial T} = \frac{k_B}{v}$$

## El Veredicto:

$$0 \neq \frac{k_B}{v}$$

¡Oh no! $\delta Q$ es inexacta.

# ¡La Cura Termodinámica!

El Factor Integrante: $\beta = \frac{1}{T} \to \mu$

Multiplicamos todo por $\frac{1}{T}$:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{k_B}{v} dv$$

$$\frac{\partial \left(\frac{C_v}{T}\right)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{k_B}{v}\right)}{\partial T} = 0$$

¡Éxito! $0 = 0$. Ahora es exacta.

Dato Curioso 💡: ¡Acabamos de descubrir la fórmula de la Entropía! $\left(\frac{\delta Q}{T} = dS\right)$

# La Caja de Herramientas: Receta para encontrar $\mu(x)$

**Paso 1:**
Identificar $M$ y $N$.

**Paso 2:**
Calcular la función dependiente de $x$:

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

**Paso 3:**
Si $f(x)$ depende solo de $x$, el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

# Ejemplo Matemático - El Desafío 📝

`(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0`

$M = 3xy + y^2$ → $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y$

$N = x^2 + xy$ → $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$

$3x + 2y \neq 2x + y$

⚠️ ¡Es Inexacta! Necesitamos a $\mu$.

# Buscando f(x)

Step 1: $f(x) = \frac{1}{x^2+xy}[(3x+2y) - (2x+y)]$

Step 2: $f(x) = \frac{1}{x^2+xy}[\ x + y]$

Factorizando el denominador: $\frac{\cancel{(x+y)}}{x\cancel{(x+y)}}$

Resultado: $f(x) = \frac{1}{x}$

# Forjando el Factor Integrante

Aplicamos la fórmula:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Sustituimos:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

Integramos:

$$\mu(x) = e^{\ln(x)}$$

$$\mu(x) = x$$

# Aplicando la Magia

Multiplicamos toda la ecuación original por x.

$$x \cdot \left[(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy\right] = 0 \cdot x$$

**Nueva Ecuación:**

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

# La Prueba Final ✅

¿Es exacta ahora?

Nuevo $M$: $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy$

Nuevo $N$: $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$

**¡Son Iguales!**

$$3x^2 + 2xy = 3x^2 + 2xy$$

🎉 ¡El problema está listo para ser integrado!

# Matriz de Síntesis: Exactas vs Inexactas

| Característica | Exacta ✨ | Inexacta 💧 |
|---|---|---|
| Derivadas Cruzadas | Iguales $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ | Diferentes $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ |
| Ejemplo en Física | Energía Interna (dU) | Calor ($\delta$Q) |
| Símbolo Diferencial | d (Ej. $d\phi$) | $\delta \circ d$ (Ej. $\delta$Q) |
| Solución | Se integra directamente | Requiere Factor Integrante ($\mu$) |

Notas Adicionales:
U ~ ⟨E⟩ (Valor esperado) y
P=F/A ⇒ F=P · A

# Cheat Sheet: Factor Integrante 🎀

**1. Condición Exacta:**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**2. Fórmula f(x):**

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

**3. Fórmula μ(x):**

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

**4. Aplicación Termo:**

$\mu = \dfrac{1}{T}$ convierte $\delta Q$ en exacta.

*¡Buena suerte en tus estudios! Tú puedes* 💖